

Zentralabitur 2019	Mathematik	Erwartungshorizont
Wahlteil Rechnertyp: GTR	gA	Gymnasium Gesamtschule

Hinweise für Lehrkräfte

Die Angaben zu Hilfsmitteln, Aufgabenauswahl und Gewichtung im Wahlteil sind den folgenden Hinweisen zu entnehmen, die auch die Prüflinge erhalten:

Hinweise zum Wahlteil

Im Wahlteil sind 68 Bewertungseinheiten (BE) von insgesamt 88 BE erreichbar.

Am Ende jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

Auswahl der Aufgaben

- Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (34 BE)	Block 2 Stochastik (17 BE)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (17 BE)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

- Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.**

Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

- Auswahlzeit: 30 Minuten
- Bearbeitungszeit: 175 Minuten

Hilfsmittel für den Wahlteil

- Zeichenmittel
- eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
- von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung

Zentralabitur 2019	Mathematik	Erwartungshorizont
Wahlteil Rechnertyp: GTR	gA	Block 1
		Gymnasium Gesamtschule

Fortsetzung Aufgabe 1A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: _____

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
c)	<p>Betrachtet wird der y-Achsenabschnitt b in Abhängigkeit von p mit $b(p) = 37 + 0,1p^2 \cdot e^{-0,1p}$.</p> <p>Mithilfe der Rechnerfunktionen erhält man einen Tiefpunkt $T(0 37)$ und einen Hochpunkt H an der Stelle 20.</p> <p>Da der Graph der Funktion b rechts vom Hochpunkt monoton fällt, den Wert 37 aber nicht unterschreitet, gibt es genau eine Tangente mit kleinstem y-Achsenabschnitt und eine Tangente mit größtem y-Achsenabschnitt.</p>	II / III	5	
	Summe:		34	
<p>Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.</p>				

Zentralabitur 2019	Mathematik	Erwartungshorizont
Wahlteil Rechnertyp: GTR	gA	Block 1 Gymnasium Gesamtschule

Aufgabe 1B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: _____

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

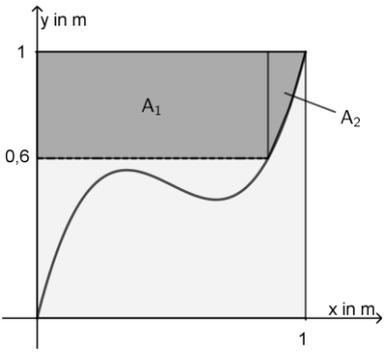
	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	<p>Mit $f(0) = 0,2$ und $f(1) = 1$ ergibt sich, dass der Weg nur durch die nordöstliche Ecke der Gartenfläche läuft. Skizze des Graphen von f.</p> <p>Die Größe der Sträucherfläche ermittelt man durch $\int_0^1 f(x) dx \approx 0,49$. Damit ergibt sich die Größe der Blumenfläche näherungsweise zu $1 - 0,49 = 0,51$. Die Sträucherfläche ist etwa $0,49\text{m}^2$ und die Blumenfläche etwa $0,51\text{m}^2$ groß. Der Abstand des Weges zur nördlichen Grenze der Gartenfläche beträgt mindestens $0,3$ m, wenn $f(x) \leq 0,7$ gilt. Mithilfe der Rechnerfunktionen ergibt sich $0 \leq x \leq x_1$ mit $x_1 \approx 0,77$. Damit ist der Punkt $P(0 0,2)$ der Anfangspunkt und $Q(x_1 0,7)$ der Endpunkt des gesuchten Wegabschnittes. Mit $P(a f(a))$ für einen beliebigen Punkt auf dem Graphen ergibt sich der gesuchte Term $\sqrt{(1-a)^2 + (f(a))^2} + \sqrt{(1-a)^2 + (1-f(a))^2}$.</p>	I I I I / II II / III	1 2 2 2 3	
b)	<p>Die beiden Punkte, an denen man genau Richtung Osten läuft, entsprechen den Punkten des Graphen von g mit waagerechter Tangente. Aus $g'(x) = 0$ ergeben sich die Lösungen x_2 mit $x_2 \approx 0,333$ und x_3 mit $x_3 \approx 0,667$. Durch Einsetzen in die Funktionsgleichung ermittelt man die Punkte $(x_2 g(x_2))$ mit $g(x_2) \approx 0,556$ und $(x_3 g(x_3))$ mit $g(x_3) \approx 0,444$. Da man im Punkt P seine Laufrichtung beibehält, kann der Nebenweg durch die Tangente t mit $t(x) = m \cdot x + b$ des Graphen von g am Punkt P beschrieben werden. Durch $m = g'(0,2) = 1,12$ erhält man die Tangentensteigung und durch Einsetzen der Koordinaten des Berührungspunktes den Wert $b = 0,264$ und somit die Tangentengleichung $t(x) = 1,12x + 0,264$. Wegen $t(1) > 1$ bestimmt man die Schnittstelle der Tangente mit der die Grenze der Gartenfläche beschreibenden Geraden $y = 1$. Daraus ergibt sich x_4 mit $x_4 \approx 0,657$. Man verlässt die Gartenfläche an der nördlichen Grenze im Punkt $R(x_4 1)$.</p>	I II	4 6	

Zentralabitur 2019	Mathematik	Erwartungshorizont
Wahlteil Rechnertyp: GTR	gA	Block 1
		Gymnasium Gesamtschule

Fortsetzung Aufgabe 1B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: _____

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

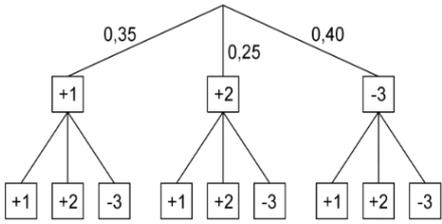
	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
	<p>Als Schnittstellen der Geraden zu $y = 0,6$ mit dem Graphen von g ergibt sich x_5 mit $x_5 \approx 0,86$. Außerdem gilt $g(1) = 1$. Die Gesamtfläche lässt sich einteilen in das Rechteck A_1 und die Restfläche A_2. Für den Inhalt A der Gesamtfläche errechnet man damit $A = 0,4 \cdot x_5 + \int_{x_5}^1 (1-g(x)) dx \approx 0,38$, d. h. die gesuchte Fläche ist ungefähr $0,38 \text{ m}^2$ groß.</p> 	II	7	
c)	<p>Der nordöstlichste Punkt der Ackerfläche ist $(1 1)$, sodass mit $h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + \frac{1}{4}$ und $h(1) = 1$ die erste Gleichung $1 = a + b + \frac{1}{4}$ folgt.</p> <p>Das geforderte Teilungsverhältnis der Fläche führt zum Ansatz $0,4 = \int_0^1 h(x) dx$.</p> <p>Mit $\int_0^1 h(x) dx = \left[\frac{1}{5} \cdot a \cdot x^5 + \frac{1}{3} \cdot b \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x \right]_0^1 = \frac{1}{5} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot b + \frac{1}{4}$ ergibt sich das</p> <p>lineare Gleichungssystem $\begin{cases} a + b = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot b = 0,15 \end{cases}$.</p> <p>Mithilfe der Rechnerfunktionen ermittelt man $a = 0,75$ und $b = 0$.</p>	II / III	7	
Summe:			34	
<p>Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.</p>				

Zentralabitur 2019	Mathematik	Erwartungshorizont
Wahlteil Rechnertyp: GTR	gA	Block 2
		Gymnasium Gesamtschule

Aufgabe 2A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: _____

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	<p>Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Kugeln mit der Beschriftung „+1“ beschreibt, kann mit $n = 100$ und $p = 0,35$ als binomialverteilt angenommen werden. Damit folgen die Wahrscheinlichkeiten</p> $P(E_1) = P(30 < X < 45) = \sum_{k=31}^{44} \binom{100}{k} \cdot 0,35^k \cdot 0,65^{100-k} \approx 0,802$ <p>und</p> $P(E_2) = 0,35^3 \approx 0,043.$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 30 und weniger als 45 Kugeln mit „+1“ beschriftet sind, beträgt ungefähr 0,802. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei entnommenen Kugeln mit „+1“ beschriftet sind, beträgt ungefähr 0,043.</p> <p>Die gegebenen Anteile lassen sich als gekürzte Brüche mit dem Nenner 20 darstellen: $35\% = \frac{7}{20}$, $25\% = \frac{5}{20}$ und $40\% = \frac{8}{20}$. Entsprechend können 20 Kugeln in der Urne sein.</p>	I	4	
		I / II	2	
b)	<p>Z sei die Zufallsgröße, die die Auszahlung pro Spiel in Euro beschreibt.</p> $P(Z > 3) = 0,25^2 = 0,0625$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel mehr als 3 Euro gewinnt, beträgt 0,0625.</p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>Für den Erwartungswert gilt:</p> $E(Z) = 4 \cdot P(Z = 4) + 3 \cdot P(Z = 3) + 2 \cdot P(Z = 2) - 1 \cdot P(Z = -1) - 2 \cdot P(Z = -2) - 6 \cdot P(Z = -6)$ $= 4 \cdot 0,25^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0,35 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,35^2 - 1 \cdot 2 \cdot 0,25 \cdot 0,4 - 2 \cdot 2 \cdot 0,35 \cdot 0,4 - 6 \cdot 0,4^2$ $= -0,7$ <p>Der durchschnittliche Verlust pro Spiel beträgt 70 Cent.</p> </div> </div>	I	2	
		II	4	
c)	<p>Durch die Ergänzung steigt die Gesamtanzahl der Kugeln von n auf n+2 und die Anzahl der mit „+1“ beschrifteten Kugeln von $0,35n$ auf $0,35n + 1$.</p> <p>Damit gilt dann: $P(+1) = \frac{0,35n + 1}{n + 2}$.</p> <p>Für die Veränderung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+1“ beschriftet ist, gilt: $\frac{0,35n + 1}{n + 2} - 0,35 = \frac{0,35n + 1}{n + 2} - \frac{0,35(n + 2)}{n + 2} = \frac{1 - 0,7}{n + 2} > 0$.</p> <p>Damit wird die Wahrscheinlichkeit durch die zusätzlichen Kugeln größer.</p>	II / III	2	
		III	3	
	Summe:		17	
<p>Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.</p>				

Zentralabitur 2019	Mathematik	Erwartungshorizont
Wahlteil Rechnertyp: GTR	gA	Block 3
		Gymnasium Gesamtschule

Aufgabe 3A

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: _____

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	<p>Der Punkt $(7320 -1750 50)$ stellt die Position der Drohne 50 m vertikal über dem Startplatz dar. Mit $\overline{SL} = \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man den Richtungsvektor der Geraden g, der die Flugrichtung beschreibt.</p> <p>Mit dem Ansatz $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + 0,3 \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man $P(4827 872 50)$.</p> <p>Für die Geschwindigkeit ergibt sich: $\frac{1}{1000} \overline{SL} = \frac{1}{1000} \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix} \approx 12,1$.</p> <p>Die Drohne fliegt also mit einer Geschwindigkeit von etwa 12,1 Meter pro Sekunde.</p>	I I I / II	2 2 2	
b)	<p>Da die x-Koordinate des Punktes T größer als 6000 ist, befindet sich die Drohne beim Punkt T außerhalb der Reichweite der Bodenstation.</p> <p>Der Abstand d der Drohne zur Bodenstation ergibt sich zu</p> $d = \left \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right = \sqrt{(7320 - 8310r)^2 + (-1750 + 8740r)^2 + 50^2}$ <p>Mithilfe der Rechnerfunktionen erhält man für $d = 6000$ die Lösungen r_1 und r_2 mit $r_1 \approx 0,1601$ und $r_2 \approx 0,8867$. Die gesuchte Position ergibt sich mit</p> $\begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ näherungsweise zu } (5990 -351 50).$ <p>Der Fußpunkt des Lots von B auf \overline{SL} liefert die x- und y-Koordinate von R, die z-Koordinate ist 50.</p>	I II II / III	2 4 2	
c)	<p>Die für die Strecke zwischen Q und A benötigte Zeit ist durch $\frac{\begin{pmatrix} 96 \\ 46 \\ 50 \end{pmatrix}}{5}$ gegeben. Die</p> <p>Änderung der Flughöhe beträgt also $50 : \frac{\begin{pmatrix} 96 \\ 46 \\ 50 \end{pmatrix}}{5} = \frac{250}{\sqrt{96^2 + 46^2 + 50^2}} \approx 2,1$.</p> <p>Die Flughöhe verringert sich pro Sekunde um etwa 2,1 Meter.</p>	II / III	3	
Summe:			17	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Zentralabitur 2019	Mathematik	Erwartungshorizont
Wahlteil Rechnertyp: GTR	gA	Block 3
		Gymnasium Gesamtschule

Aufgabe 3B

Erwartungshorizont / Bewertungsbogen für den Prüfling: _____

(AFB: Anforderungsbereiche; BE 1: erreichbare Bewertungseinheiten; BE 2: vom o. a. Prüfling erreichte Bewertungseinheiten)

	Erwartete Schülerleistungen	AFB	BE 1	BE 2
a)	<p>Mit $\vec{CA} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0 \\ -3,5 \end{pmatrix}$ und $\vec{CB} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 0 \\ -3,5 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{CA} = \sqrt{3,5^2 + 3,5^2} = \vec{CB}$ und</p> <p>$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = -3,5^2 + 3,5^2 = 0$.</p> <p>Also ist das Dreieck gleichschenkelig sowie rechtwinklig im Punkt C.</p>	I	3	
b)	<p>Aus dem Ansatz $E: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ folgt durch Einsetzen der Koordinaten der Punkte A und C das LGS $\begin{cases} 7a + 4c = d \\ 3,5a + 7,5c = d \end{cases}$ mit den Lösungen</p> <p>$d = 11a$ und $c = a$. Mit $a = 1$ ergibt sich $E: x + z = 11$.</p> <p>Der Mittelpunkt der Dachfläche wird durch den Punkt $M(5,25 -70 5,75)$ dargestellt.</p> <p>Mit $\vec{MK} = \begin{pmatrix} 24,75 \\ 90 \\ -4,25 \end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor der Dachebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich:</p> <p>$\sin(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 24,75 \\ 90 \\ -4,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left \begin{pmatrix} 24,75 \\ 90 \\ -4,25 \end{pmatrix} \right \cdot \left \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right } \approx 0,155$ und $\alpha \approx 8,9^\circ$. Die Sichtlinie schließt also mit der</p> <p>Dachfläche einen Winkel von etwa $8,9^\circ$ ein.</p>	I / II	3	
c)	<p>Bei einer Höhe von 450 m befindet sich die Flugzeugspitze im Punkt $S(s_x s_y 450)$. Da S auf der gegebenen Geraden liegt, folgt aus einem Vergleich der z-Koordinaten: $s = \frac{450}{7}$. Damit ergeben sich die Koordinaten des Punktes S zu</p> <p>$s_x = -60 - \frac{450}{7} \cdot 20 \approx -1345,7$ und $s_y = -990$.</p> <p>Der Abstand der Flugzeugspitze von der Kamera entspricht der Länge des Vektors \vec{SK}. Damit ergibt sich der Abstand näherungsweise zu:</p> <p>$\sqrt{(1345,7 + 30)^2 + (990 + 20)^2 + (-450 + 1,5)^2} \approx 1764,6$.</p> <p>Die Flugzeugspitze ist also etwa 1765 Meter von der Kamera entfernt.</p>	II	2	
Summe:		II / III	5	
			17	

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechenden Bewertungseinheiten unter Berücksichtigung der verbindlichen BE 1 bewertet.

Zentralabitur 2019	Mathematik						Erwartungshorizont					
Pflichtteil / Wahlteil	gA			Bewertung			Gymnasium Gesamtschule					

Zum **Erwartungshorizont**:

Der Erwartungshorizont skizziert mögliche Lösungswege. Je nach gewähltem Lösungsansatz sind häufig auch alternative Bearbeitungen der Aufgabenstellungen denkbar, die bei fachlicher Richtigkeit und angemessener Berücksichtigung der Operatoren mit entsprechenden Bewertungseinheiten zu bewerten sind.

Die rechts stehenden Bewertungseinheiten sind jedoch verbindlich. Bei der Korrektur, Bewertung und Beurteilung sind die Bemerkungen gemäß der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife vom 18.10.2012 (Abschnitt 3.2.1.3 Bewertung der Prüfungsleistung) zu beachten.

Werden mindestens 75 % der Bewertungseinheiten erreicht, so ist davon auszugehen, dass Leistungen in allen drei Anforderungsbereichen erbracht worden sind.

Werden mindestens 45 % der Bewertungseinheiten erreicht, so ist davon auszugehen, dass Leistungen über den Anforderungsbereich I hinaus erbracht worden sind.

Folgender **Bewertungsmaßstab** ist bezogen auf die Gesamtzahl von 88 BE anzuwenden:

Ab Prozent	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	33	27	20	00
Punkte	15	14	13	12	11	10	09	08	07	06	05	04	03	02	01	00

Bezug der Wahlaufgaben zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards:

Wahl- aufgabe		Leitidee					Allgemeine mathematische Kompetenzen							
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6		
1A	a	x	x		x		x		x	x	x	x		
	b	x	x		x			x	x	x	x	x	x	x
	c	x	x		x		x	x		x	x	x	x	x
1B	a	x	x		x		x	x	x	x	x	x	x	x
	b	x	x		x			x	x	x	x	x	x	x
	c	x	x		x			x	x	x	x	x	x	x
2A	a					x	x	x	x			x		
	b		x			x			x	x	x	x	x	x
	c					x	x	x	x			x	x	x
2B	a	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	b	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
3A	a	x	x	x	x		x	x	x			x	x	x
	b	x	x	x			x	x	x	x	x	x	x	x
	c	x	x	x				x	x			x		
3B	a	x	x	x			x				x	x	x	
	b	x	x	x						x	x	x	x	x
	c	x		x			x	x	x	x	x	x	x	x